研究メモ：ガウス分布の分散が指数分布に従うとして分散を積分消去するとラプラス分布が得られることの証明

正田備也

平成 23 年 6 月 29 日

この研究メモでは、ガウス分布の分散が指数分布に従うとして、その分散を積分消去すると、ラプラス分布が得られることを証明します。話を早く進めるために、Samuel Kotz, Tomasz J. Kozubowski, and Krzysztof Podgorski. *The Laplace distribution and generalizations: a revisit with applications to communications, economics, engineering, and finance.* Birkhauser Boston, 2001. の p.23 の Remark 2.2.1 の式 (2.2.4) を証明します。この本の p.22 には特性関数を用いた証明がありますが、ここでは初等的に証明します。さて、その式 (2.2.4) は次のとおりです。

$$\frac{1}{2}e^{-|x|} = \int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi w}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2w}+2w\right)}dw. \tag{1}$$

この等式を証明すれば、ガウス分布 $\mathcal{N}(x;0,w)$ の分散 w が指数分布 $\mathrm{Exp}(w;1)$ に従うとして、w を積分消去するとラプラス分布 $\mathrm{Laplace}(x;1)$ が得られることを示せます。（ガウス分布の平均がゼロでない場合や、指数分布のパラメータが 1 でない場合については、同様に証明できると思います。）

まず、

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi w}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2w}+2w\right)}dw \tag{2}$$

とおきます。そして、$f(x)$ を x で微分します。

$$f'(x) = -\int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi w}}\frac{x}{2w}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2w}+2w\right)}dw. \tag{3}$$

ここで $v = \frac{x^2}{4w}$ と変数変換します。この変換は、式 (3) の指数関数の形が変わらないように選ばれています。つまり、$\frac{x^2}{2w} + 2w = \frac{x^2}{2v} + 2v$ が成り立ちます。さらに、$w = \frac{x^2}{4v}$ や $\frac{dw}{dv} = \frac{x^2}{4v^2}$ が得られますので、式 (3) は

$$f'(x) = -\int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2\sqrt{v}}{|x|}\frac{x}{2}\frac{4v}{x^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2v}+2v\right)}\frac{x^2}{4v^2}dv = -\mathrm{sgn}(x)\int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi v}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2v}+2v\right)}dv \tag{4}$$

と、書き換えられます。$\mathrm{sgn}(x)$ は x の符号です。式 (2) とよく見比べると、結果には $f(x)$ がそのまま表れており、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\mathrm{sgn}(x) \tag{5}$$

が得られたことになります。よって、両辺を不定積分することで

$$\log f(x) = -|x| + const. \tag{6}$$

が得られます。したがって、$f(x)$ は、C を規格化定数として

$$f(x) = \frac{1}{C}e^{-|x|} \tag{7}$$

という形に書けることが分かりました。$C = 2$ であることは明らかです（規格化の積分計算をしてみればよい）。