

1.  $xy$  平面上の領域  $D$  で定義された曲面  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  が  $C^1$  級ならば, 曲面積  $S$  は

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dxdy$$

で与えられる。半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$  の円柱  $x^2 + y^2 \leq b^2$  が切り取る部分の曲面積を求めよ。  
ただし,  $0 < b < a$  とする。

2. 次の設問に答えよ。

(1) ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  が 1 次独立であるとき,  $c_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + c_2(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + c_3(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1) = \mathbf{o}$  をみたすようなスカラー  $c_1, c_2, c_3$  を求めよ。ただし,  $\mathbf{o}$  は零ベクトルを表す。

(2)  $n (\geq 3)$  個のベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  が 1 次独立であるとき,  $n$  個のベクトル  $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1} (1 \leq i \leq n-1), \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$  が 1 次独立かどうかを  $n$  によって場合分けして調べよ。

3. 次の設問に答えよ。

(1) 以下の関数が独立かどうか調べよ。

(i)  $1, \sin(x), \sin(2x), \sin(3x)$

(ii)  $1, \cos(x), \cos(2x), \cos^2(x)$

(2) 定数係数 2 階線形微分方程式  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$  について以下の設問に答えよ。

(i)  $a = 0$  の場合の一般解を求めよ。

(ii) (i) の非自明な一般解は振動する。その周期を求めよ。

(iii)  $a > 0$  であるとする。一般解が振動しない  $a$  の条件を示せ。

4. 以下の設問に答えよ。

(1)  $n$  を素数でない自然数とする。このとき、 $n$  の約数  $p$  で、 $1 < p \leq \sqrt{n}$  を満たし、かつ素数であるものが存在することを示せ。

(2) 30 以下の素数をすべて求めよ (答だけでよい)。

(3) 問 (1), (2) を利用して、907 は素数であることを示せ。

(4) ユークリッドの互除法を利用して、 $203x + 907y = 1$  を満たす整数  $x, y$  を求めよ。

(5) 有限体  $F_{907}$  において、 $\frac{13}{203}$  を求めよ。