長崎大学工学部情報システム工学科

平成20年度AO入試課題（数学）

以下の文章をよく読み，文中の問に答えよ．解答は，課題（数学）の解答用紙に記入すること．答だけでなく，答に至る過程もていねいに説明すること．

整数 m, n (ただし，$m > 0$) に対し，n を m で割った商を q，余りを r とすると，

$$n = qm + r \qquad (0 \leqq r < m)$$

が成り立つ．特に，$r = 0$ となるとき，n は m で**割り切れる**という．また，このとき，n を m の**倍数**，m を n の**約数**という．

k $(\geqq 2)$ 個の整数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ の共通の約数を $n_1, n_2, \cdots, n_k$ の**公約数**といい，公約数のうち，最大のものを**最大公約数**という．$n_1, n_2, \cdots, n_k$ の最大公約数を $\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ と表す．gcd は greatest common divisor の頭文字である．$\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k) = 1$ のとき，$n_1, n_2, \cdots, n_k$ は**互いに素**という．

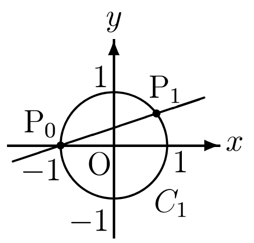
例．$12 = 2^2 \times 3$ と $30 = 2 \times 3 \times 5$ の公約数は 1, 2, 3, 6 で，最大公約数は 6 である．また，3 つの整数 10, 15, 24 について，

$$10 = 2 \times 5, \quad 15 = 3 \times 5, \quad 24 = 2^3 \times 3$$

の公約数は 1 のみだから，$\gcd(10, 15, 24) = 1$．従って，10, 15, 24 は互いに素である．

整数 m, n (ただし，$m > 0$) により，$\frac{n}{m}$ と表せる数を**有理数**とよぶ．また，座標平面上の点 (a, b) で，a, b がともに有理数となるものを**有理点** (ゆうりてん) とよぶ．例えば，$(1, -2)$ や $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ は有理点であるが，$(1, \sqrt{2})$ は有理点ではない．

座標平面上で，円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ を考える．C_1 上には，$(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ などの有理点がある．C_1 上の有理点をすべて求めるために，次の考察をする．まず，点 $\mathrm{P}_0(-1, 0)$ は明らかに C_1 上の有理点である．P_0 と異なる C_1 上の有理点 $\mathrm{P}_1(a, b)$ があるとすると，$a \neq -1$ であるから，直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ の傾きは $\frac{b-0}{a-(-1)} = \frac{b}{a+1}$ で与えられ，有理数であることがわかる．



逆に，t を任意の有理数とし，点 P_0 を通る傾き t の直線 l を考える．l は P_0 以外の点 P で，C_1 と再び交わる．

問 1．直線 l の方程式，および点 P の座標を求め，P が有理点であることを示せ．

以上のことから，C_1 上の有理点 P $(\neq \mathrm{P}_0)$ と，P_0 を通り，傾きが有理数の直線 l が 1 つずつ対応する．従って，C_1 上の有理点は無数にあることがわかる．

問 2．点 P が第 1 象限 $(x > 0,\ y > 0)$ にあるための t が満たすべき条件を求めよ．

問 3．C_1 上の有理点で第 1 象限にあるものを 7 個以上求めよ．

次に，座標平面上で，円 $C_3 : x^2 + y^2 = 3$ を考える．C_3 上に有理点 $\mathrm{Q}_0(c, d)$ があったとする．$c = \frac{m}{l},\ d = \frac{n}{l}$ (l, m, n は整数で，$l > 0$) と表す．$k = \gcd(l, m, n)$ とおく．もし，$k > 1$ なら，$l = kl',\ m = km',\ n = kn'$ (l', m', n' は整数) と表すことができ，$\gcd(l', m', n') = 1$ が成り立つ．また，$c = \frac{m'}{l'},\ d = \frac{n'}{l'}$ である．

よって，最初から，$c = \frac{m}{l},\ d = \frac{n}{l}$ (l, m, n は互いに素で，$l > 0$) と表すことにする．このとき，$(\frac{m}{l})^2 + (\frac{n}{l})^2 = 3$ より，

$$m^2 + n^2 = 3l^2$$

が成り立つ．

問 4．m^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ．

問 5．$m^2 + n^2 = 3l^2$ を満たす互いに素な整数 l, m, n は存在しないことを示せ．また，C_3 上に有理点は存在しないことを示せ．

問 6．円 $C_2 : x^2 + y^2 = 2$ 上の有理点 $\mathrm{R}_0(-1, -1)$ を利用して，C_2 上に有理点が無数に存在することを示せ．