長崎大学工学部情報システム工学科

平成 20 年度 AO 入試課題 （物理）

次の説明を読み、設問に答えよ。解答は、8 ページ目、9 ページ目に書くこと。答だけでなく、答に至る過程もていねいに説明すること。

動くと長さが縮むというアインシュタインの特殊相対性理論の結果から、電荷の間に働くクーロン力と磁場の中で動く電荷が受けるローレンツ力が同じものだと言うことを説明してみよう。

電荷にはプラスのものとマイナスのものがあり、異種の電荷同士には引力が、同種の電荷同士には反発力が発生する。この力をクーロン力と言う。距離 r [m] だけ離れて置かれた q_1 [C] の点電荷と q_2 [C] の点電荷の間には $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ [$\mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$] のクーロン力が働く。$k$ は実験から決まる比例定数であり、両辺の単位の次元を合わせる役目も持っている。電荷の単位をかってに決めたのならこの値はいかにも実測値というような値になるであろうが、電荷の単位 C(クーロン) を電荷の移動である電流の磁気作用から決めたので、$k = \boxed{\quad ㋐ \quad} \cdot \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3}{\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{s}^2} \fallingdotseq 9\times10^9 \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$ となる。ここで $\boxed{\quad ㋐ \quad}$ には光速（$c \fallingdotseq 2.99\times10^8$ [m/s]）が含まれる。なぜ光速が関係するのかは以下の説明で明らかとなる。また点状に電荷が存在しているものを点電荷と言っている。距離 r だけ離れて置かれたと言うには電荷がぼやっと広がって存在していては困るので点電荷と言っているだけで電荷は電荷である。実は質量はエネルギーとなって減ってしまうことがあるのに対して、電荷は電荷のままで絶対に増えたり減ったりしないと考えられている。

このクーロン力を一方の電荷が作った空間の歪 (ひずみ) からもう一方の電荷が力を受けるのだと考えるのが電場の考え方である。すなわち q_1 [C] の電荷は距離 r [m] のところに $E = k\frac{q_1}{r^2}$ [N/C] の電場をつくり、そこに置かれた q_2 [C] の電荷はこの電場から $F = E\cdot q_2 = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ [N] の力を受けると考えるのである。電場は電気力線を使って次のようにイメージすることができる。電気力線は途切れることなく続いており、プラスの電荷からは電荷 q [C]

に等しい q [本] の電気力線が湧き出し、マイナスの電荷には電荷の量 q [C] に等しい q [本] の電気力線が吸い込まれているとする。プラスの電荷から湧き出した電気力線はマイナスの電荷に吸い込まれるか無限の彼方に向かっている。同様に無限の彼方から来てマイナスの電荷に吸い込まれる電気力線もある。電気力線はゴムひものように張力をもち、また電気力線同士は閉じ込められた水のように圧力をもっている。従って電気力線でつながっている異種の電荷は引き合い、同種の電荷は反発するというのである。電気力線は線のイメージなので本数と言っているが、1 本 1 本離れて整数本存在するのではなくて連続して存在する。プラスの 1 [C] の電荷から湧き出している電気力線の総数をまとめて 1 [本] と呼ぶことにし、単位としては本ではなく電荷の単位である C をそのまま用いる。すなわち、プラスの電荷 q [C] からは q [C] の電気力線が湧き出すというように表現する。q_1 [C] の電荷が距離 r [m] のところにつくる電場が $E = k\dfrac{q_1}{r^2}$ [N/C] となることを、単独に存在する q_1 [C] の電荷から放射線状に湧き出している電気力線の密度と関連させてみる。ここで電気力線の密度とは電気力線が垂直に貫く面の単位面積あたりの本数である。例えばこの電荷を中心とする半径 r [m] の球面を考えるとこの球の表面積は $4\pi r^2$ [m^2] であり、この球面を貫く電気力線の本数はこの電荷から湧き出した本数 q_1 [C] に等しいので、単位面積あたりの本数、すなわち電気力線の密度は $\dfrac{q_1}{4\pi r^2}$ [C/m^2] となり、電気力線の密度は電場に比例しているのが分かる。電気力線の密度に $4\pi k$ をかければ電場となる。

たくさんの電荷を取り囲む面を考えたとき、その面を通過する電気力線の本数は、電気力線のイメージから考えて内部にふくまれる電荷の総量に等しい。これを手がかりとして、無限に長い直線の上に電荷が一様に分布しているときの電場の様子を考える。点電荷からは電気力線が放射線状に湧き出すとしても、その点電荷が直線上に一様に分布していれば電気力線は互いに押されて直線に垂直になるはずである。そこで直線を中心とする半径 r [m]、高さ l [m] の円筒を考えれば、この円筒を貫く電気力線の本数はこの直線の l [m] の上に存在する電荷の量に等しい。電荷密度 s [C/m]（単位長さ当たりの電荷の量）で電荷が存在しているとすると円筒を貫く電気力線の本数は sl [C] となる。この円筒の表面積（もちろん上面と底面は電気力線が通過しないので含めない）は $2\pi rl$ [m^2] であるか

ら、円筒面の電気力線の密度は $\dfrac{s}{2\pi r}$ [C/m^2] となる。従って円筒面の電場は $4\pi k$ をかけて $\dfrac{2ks}{r}$ [N/C] となる。すなわち電荷密度 s [C/m] の直線状の電線から距離 r [m] のところの電場は $\dfrac{2ks}{r}$ [N/C] となる。これを後で使うので覚えておいてほしい。

2 本の十分に長い電線イ、ロに電流 I_1 [A]、I_2 [A] が流れていて、それらの距離が r [m] であるとき、ロの l [m] はイから $F = k'\dfrac{I_1 I_2 l}{r}$ [N] の力を受ける。この力は電流の向きが同じであるとき引力、異なるとき反発力となる。k' は実験から決まる比例定数であり、両辺の単位の次元を合わせる役目も持っているが、$I_1 = I_2$ かつ $r = l = 1$ [m] のときに $F = 2\times 10^{-7}$ [N] となるような電流 $I_1 = I_2$ を電流の単位 A(アンペア) と決めたので $k' = \dfrac{2\cdot \mathrm{N}}{10^7\cdot \mathrm{A}^2}$ となる。電場を考えたときと同様に、この電流同士が受ける力を一方の電流が作った空間の歪からもう一方の電流が力を受けるのだと考えるのが磁場の考え方である。すなわち、イの電流 I_1 [A] は距離 r [m] のところに磁場 $B = k'\dfrac{I_1}{r}\ \left[\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}}\right]$ をつくり、そこに置かれた I_2 [A] の電流の l [m] の部分はこの磁場から $F = B\cdot I_2\cdot l = k'\dfrac{I_1 I_2 l}{r}$ [N] の力を受けると考えるわけである。

電荷密度が s [C/m] である電線上の電荷が速度 v [m/s] で移動しているとき、ある断面を時間 t [s] の間に通過する電荷とはその断面の手前の長さ vt [m] に含まれていた電荷であるから、その量は vts [C] となり、単位時間当たりの通過電荷量である電流は vts [C] を t [s] で割った vs [A = C/s] となる。従ってこの電線の長さ l [m] の部分は B [T] の磁場から $F = B\cdot vs\cdot l$ [N] の力を受ける。一方 $vs\cdot l$ を $sl\cdot v$ と考えれば、sl は電荷密度が s [C/m] である電線の長さ l [m] に含まれる電荷の量であるので、電荷 sl [C] が速度 v [m/s] で移動すると B [T] の磁場から $F = B\cdot sl\cdot v$ [N] の力を受けると言うこともできる。この動く電荷が磁場から受ける力をローレンツ力という。右ねじを電流の方向に進めるために回す向きを電流が作る磁場の向きであるとし、プラスの電荷の移動の方向から磁場の方向へ右ねじを回すときそのねじが進む向きをローレンツ力の向きであるとすると、同じ向きの平行電流に引力が働くことが説明できる。以上をまとめると、電荷密度が s [C/m] である直線状の電荷が速度 v [m/s] で移動することは、vs [A = C/s] の電流が流れることに等しく、この電流は

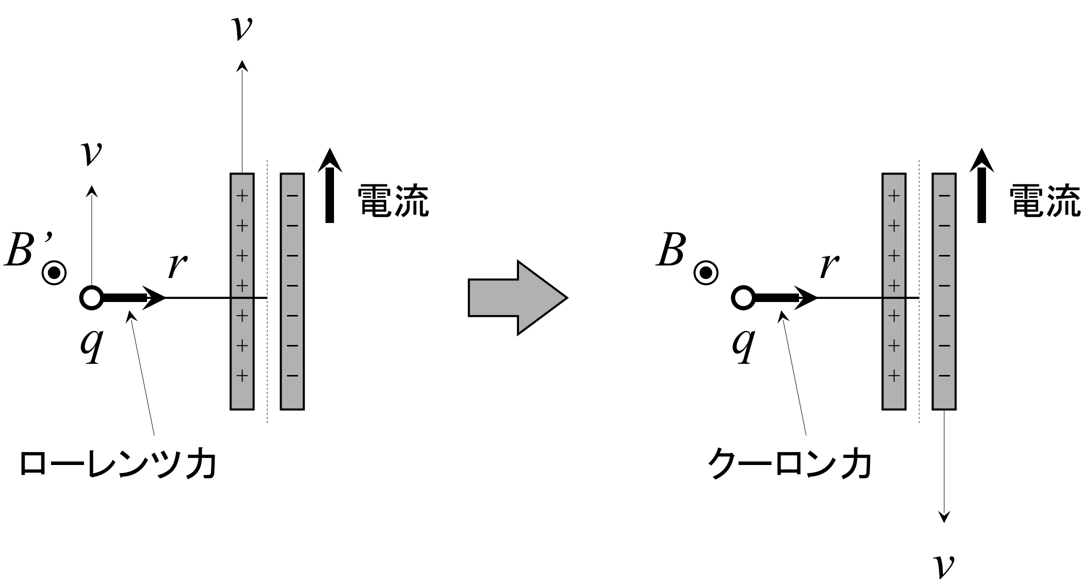

図 1

距離 r [m] のところに磁場 $B = k'\frac{vs}{r}\ \left[\mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot m}}\right]$ をつくり、この位置に存在するプラスの電荷 q [C] は止まっているとまったく力を受けないが、速度 v [m/s] で動き出すと $F = qvB$ [N] の力を、v の方向から B の方向へ右ねじを回すときそのねじが進む方向に受けるということになる。これを後で使うので覚えておいてほしい。

相対性理論は高校では習わないが、不思議な話ということで興味を持って何か本を読んだ人もいるかもしれない。ここではなぜそうなるのかということは考えずに結果だけを使うことにしよう。互いに速度を持つ 2 つの慣性座標系を考えよう。慣性座標系とはその中では加速度を感じず、止まっている物体はいつまでも止まっている場所のことである。たとえばビルの廊下と一定速度で降りていくエレベータの中を考えるとこの 2 つの場所は互いに速度を持つ 2 つの慣性座標系となる。両方の慣性座標系に同じ長さ、例えば 1 [m] の棒が互いの速度と同じ向きに置いてあったとして、すれ違うときに光を当てるなどして相手の棒の長さを計ると相手の棒の長さは 1 [m] より短い $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ [m] になっているというのである。ここで v [m/s] は一方から他方を見た速度、c [m/s] は光速である。

図 1 のようにプラスの点電荷 q [C] の横に長い絶縁体の棒が 2 本あって左側の棒にはプラスの電荷が右側の棒にはマイナスの電荷がくっついているとする。まず、左側の棒と点電荷が速度 v [m/s] で動いている状況を考えよう。2 本の棒の同じ長さ当たりのプラスの電荷とマイナスの電荷はちょうど同じ量で点電荷はクーロン力を感じないとする。しかしプラスの電荷が動いているということは電流が流れているということなので、この電流の周りには磁場が発生している。点電荷はその中を動いているのでローレンツ力を感じて棒の方へ移動していくであろう。

つぎにこの状況を速度 v [m/s] で動きながら見てみるとどうなるであろうか。こんどは右側の棒だけが反対側に動いているように見える。マイナスの電荷が反対側に動くので結局電流の向きは先ほどと変わらない。したがって同じように磁場が発生しているはずである。ところが点電荷は止まっているのでローレンツ力は感じない。しかし左の棒は動いているときに縮んでいたものが止まったので本来の長さになり、右の棒は止まっていたものが動き出したので縮んでいる。電荷のくっつき方は変わらないので 2 本の棒の同じ長さを考えると先ほどバランスしていたのならば縮んだ方の電荷すなわちマイナスの電荷の方が多くなっているはずなので、点電荷はクーロン力を感じて棒の方へ移動していくであろう。

このようにローレンツ力とクーロン力は本来同じものだと考えられるのである。それではその大きさまでまったく同一であるのか正確に計算してみよう。計算を簡単にするために少し状況を変えて図 2 のように、まずプラスの電荷がくっついている左の棒だけが速度 v [m/s] で上の方に動いていて、距離 r [m] のところにある q [C] のプラスの点電荷とマイナスの電荷がくっついている右の棒は止まっているとする。このとき 2 本の棒の同じ長さ当たりのプラスの電荷とマイナスの電荷はちょうど同じ量（これを電荷密度 s [C/m] とする）でバランスしているとしよう。そうすると点電荷にクーロン力は働かない。一方プラスの電荷が動いている、すなわち電流が流れているので磁場が発生しているが、点電荷は止まっているのでローレンツ力も働かない。結局電荷は棒の方に近づくことも遠ざかることもない。次にこれを左の棒と同じ速度 v [m/s] で上の方に動きながら眺めたとすると、左

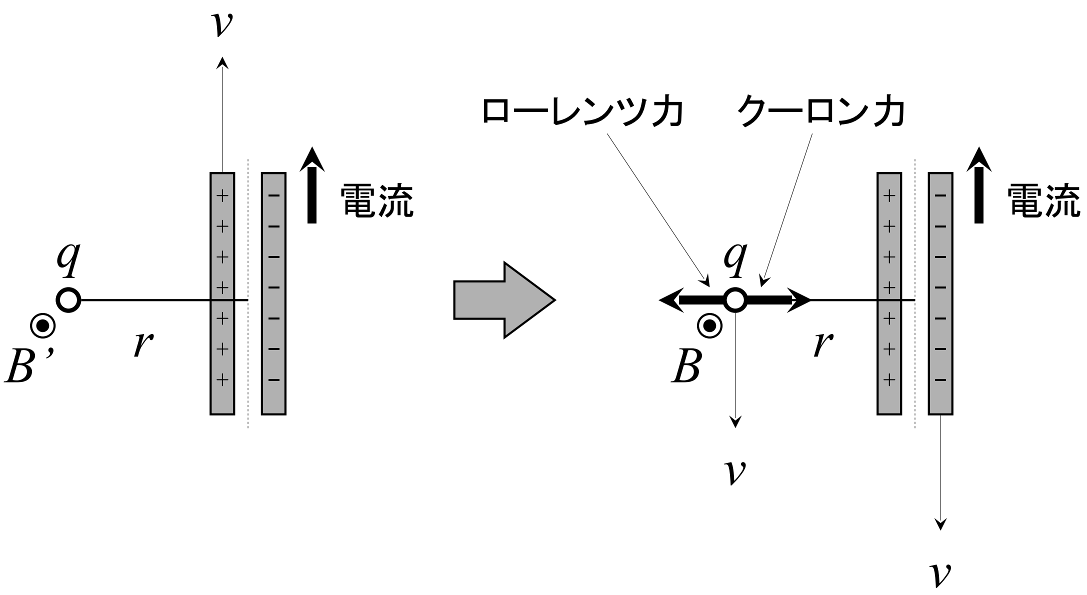

図 2

の棒は止まって、右の棒と点電荷は下のほうへ速度 v [m/s] で動きだす。左の棒は縮んでいたものが元に戻るのだからその長さが $\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ 倍になり、右の棒は動き出すのでその長さが $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍になる。電荷密度は長さに反比例するので、左の棒のプラスの電荷密度は $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍に、右の棒のマイナスの電荷密度は $\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ 倍になる。従って正味の電荷密度は

$$s' = \left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) \times s \ \text{[C/m]}$$

となる。これを整理すると

$$s' = \frac{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2-1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \times s = -\frac{v^2 s}{c^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \ \text{[C/m]}$$

となる。一方、右の棒のマイナスの電荷密度 $\dfrac{s}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ [C/m] が v [m/s] で下に動いているので、電流は上向きに $\dfrac{vs}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ [A] となる。

まず正味の電荷が作る電場によって点電荷 q [C] が受けるクーロン力は $F = \boxed{\text{㋑}}$ [N] で右向きとなる。つぎに電流が作る磁場によるローレンツ力は $F = \boxed{\text{㋒}}$ [N] で左向き

となる。同じ現象を見ているのだから、点電荷は棒の方に近づくことも遠ざかることもないはずである。すなわち、これらはつりあっているはずなのでその大きさが等しいはずである。ここから k と k' の関係が導かれる。$k' = \dfrac{2 \cdot \mathrm{N}}{10^7 \cdot \mathrm{A}^2}$ と決めたのであったので

$$k = \boxed{\quad ㋐ \quad} \cdot \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3}{\mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{s}^2}$$

となる。これはクーロン力の比例定数 k の定義そのものである。すなわちクーロン力の比例定数 k はローレンツ力とクーロン力が同じものであると考えることにより決められたものなのである。

問 1　㋑を求めよ。

問 2　㋒を求めよ。

問 3　㋐を求めよ。

問 4　図 1 のローレンツ力とクーロン力はどちらが大きいか理由とともに記せ。

長崎大学工学部情報システム工学科　　　**平成** 20 **年度** AO **入試課題 （物理）**

解答用紙　　　　　　　　　　**受験番号**____________________________

問 1

問 2

問 3

解答用紙　　受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 4