

図 1 に示す長さ l , 幅 a , 高さ h , 質量 m の直方体ブロックを, 図 2 のように長さ方向にずらして積み上げることを考える. ここで, ブロックは摩擦のない水平な面に積むものとし, ブロック間の摩擦もないと考える.

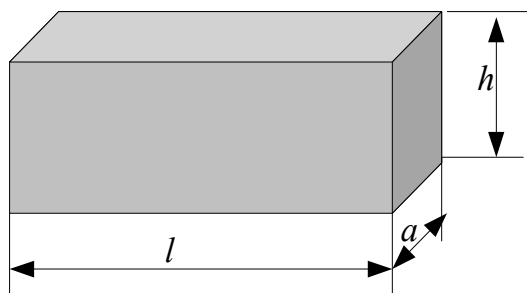


図 1 直方体ブロック

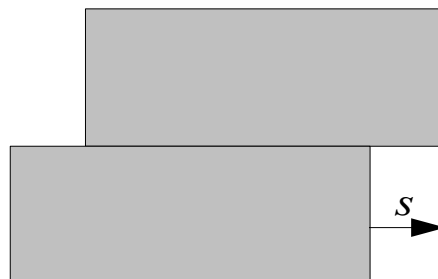


図 2 ブロックの積み上げ

このような問題は, ブロックの重力がその重心にかかるとしてブロックを質点と考え, 質点に作用する力とモーメントの釣り合いを考えるのが得策である. 図 3 のように奥行き方向を無視してブロック底面左角を原点とし, 長さ方向に x 軸をとるとすると, 一つのブロックの重心は, $x=l/2$ となる. このとき, ブロックが床から受ける反力は, 図 4 に示すように重心位置に作用し, 重力と反力が同じ大きさで向きが反対であり, 垂直方向の力, および原点を中心としたモーメントが釣り合うためブロックは静止する. ここで, g は重力加速度である.

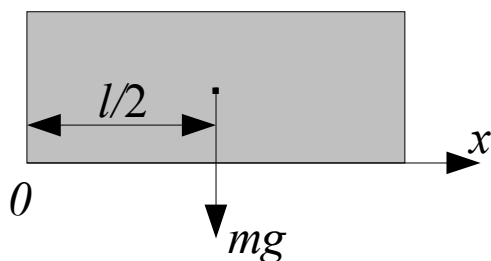


図 3 ひとつのブロックの重心

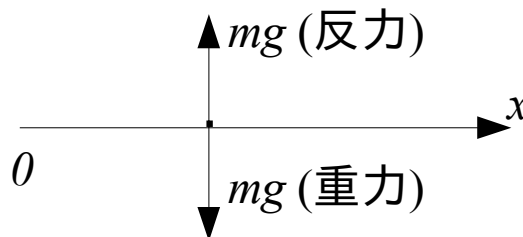


図 4 ひとつのブロックに作用する力

ここで, 図 2 のようにブロックを 2 つ積む場合の釣り合いを考える. 上のブロックを s だけ長さ方向にずらして積む場合, 図 5 のように, 上のブロックの重心が, 下のブロックの外側になってしまうと, 反力が生じず垂直方向の力, および原点まわりのモーメントの釣り合いがとれなくなり, ブロックを積むことができなくなる.

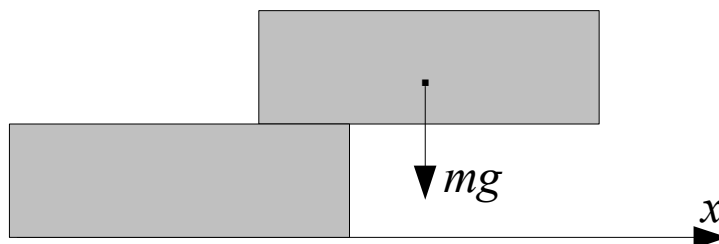


図 5 積むことができない場合

ここで、ふたつのブロックを積む場合の限界のずらし量は、上のブロックの重心が下のブロックの端点にある場合で、その値は $l/2$ となる。これを、ブロックをふたつ積んだ場合の最大せりだし量と呼び、 T_2 と表すことにする。また、この状態をブロックをふたつ積んだ場合の最大せりだし状態と呼ぶ。

ブロックの数が n ($n > 2$) の場合の最大せりだし量 T_n を求めたい。図 6 に示すように T_n は、一番下のブロックの端点から一番上のブロックの端点までの水平距離である。

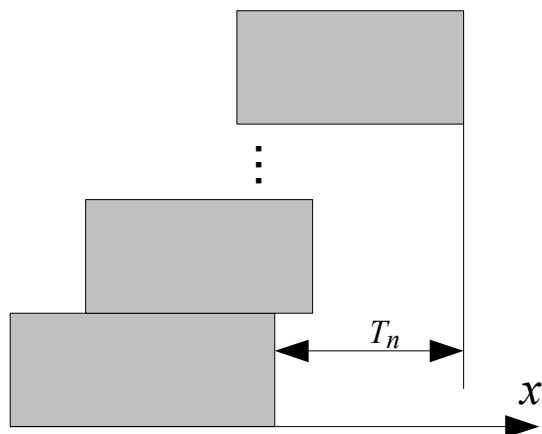


図 6 n 個のブロックを積んだときの最大せりだし量

n 個のブロックを積んだ場合の最大せりだし量は、以下の条件を満たすようにすれば得られる。

- 一番上のブロックとその下のブロックがブロックをふたつ積んだ場合の最大せり出し状態である。
- 上の 3 つのブロックが最大せりだし状態である (上のふたつのブロックの合成重心が 3 番めのブロックの端点にある)。
- 上の 4 つのブロックが最大せりだし状態である (上の 3 つのブロックの合成重心が 4 番めのブロックの端点にある)。
- $\vdots$
- 上の $n-1$ 個のブロックが最大せりだし状態である (上の $n-2$ 個のブロックの合成重心が $n-1$ 番めのブロックの端点にある)。
- 上の n 個のブロックが最大せりだし状態である (上の $n-1$ 個のブロックの合成重心が n 番めのブロックの端点にある)。

ここで、合成重心について説明する。この場合の合成重心とは、積み上げられた複数のブロックを一つの質点と考えたときの質点位置のことである。例として、最大せりだし状態にあるふたつのブロックを考える。図 7 は最大せりだし状態にあるふたつのブロックであり、図 8 はその場合の力、モーメントの釣り合いを表したものである。

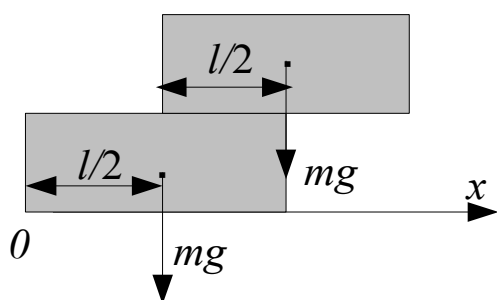


図 7 最大せりだし状態にある二つのブロック

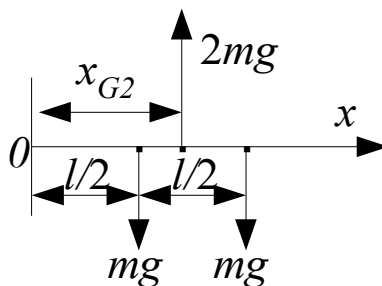


図 8 力、モーメントの釣り合い

図 8 において, 上向きの大きさ $2mg$ の力は, 床から受ける反力であり, x_{G2} は, 最大せりだし状態にあるふたつのブロックの合成重心位置である.

これらの前提を踏まえて以下の問に答えよ.

- 解答は, 解答用紙の所定の解答欄に解答すること.
- 各解答用紙には, 忘れずに受験番号を記入すること.
- 解答用紙とは別に, メモ用紙を配るので, 計算等に利用してかまわない.

問 1 ふたつのブロックを積んで最大せりだし状態にあるときの合成重心位置 x_{G2} を求めよ (図 9 参照).

問 2 ふたつのブロックを積んで最大せりだし状態にあるときの合成重心から上のブロックの右側端点までの距離 X_2 を求めよ (図 9 参照).

問 3 3 つのブロックを積んだときの最大せりだし量 T_3 を求めよ.

問 4 3 つのブロックを積んで最大せりだし状態にあるときの合成重心位置 x_{G3} を求めよ.

問 5 4 つのブロックを積んだときの最大せりだし量 T_4 を求めよ.

問 6 n 個のブロックを積んだときの最大せりだし量 T_n を求めよ.

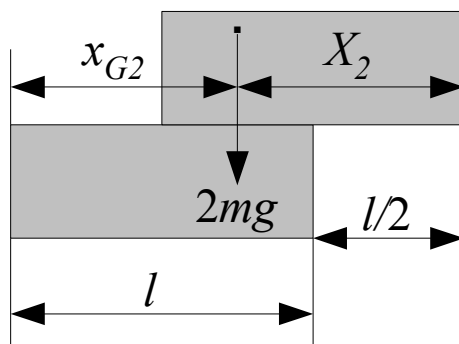


図 9 最大せりだし状態にある二つのブロックの重心座標