

解答はそれぞれの【解答欄】に記入してください。答のみでなく答を導き出した過程も記述してください。書かれた内容を基に採点を行いますので、答をうまく得ることができなかった場合でも、解こうとした方法は記述しておいてください。

1. 数 a の n 乗を求めることを考える。 n は自然数で、 a については自明な場合を除くため $a \neq 0, \pm 1$ とする。初期値として 1 をとりそれに a を n 回掛ければ a^n が得られるが、それでは n が大きくなるととても非効率的である。

そこでつぎに述べる方法が考え出された。まず第 1 列目には上から下へ向かって n とそれをつぎつぎに 2 で割った商を書く。ただし余りが出たらそれは切り捨てる。その右側の第 2 列には a とそれをつぎつぎに 2 乗した数を書く。そしてその右の第 3 列には第 1 列の数が奇数のとき第 2 列にある数を書き写す。最後に第 3 列に書き出された数を掛け合わせると a^n が得られる。例としてつぎにあげたのは $n = 10$ の場合と $n = 100$ の場合である。

[例 1]

10	a	
5	a^2	a^2
2	$(a^2)^2 = a^4$	
1	$(a^4)^2 = a^8$	a^8
		$a^2 \cdot a^8 = a^{10}$

[例 2]

100	a	
50	a^2	
25	$(a^2)^2 = a^4$	a^4
12	$(a^4)^2 = a^8$	
6	$(a^8)^2 = a^{16}$	
3	$(a^{16})^2 = a^{32}$	a^{32}
1	$(a^{32})^2 = a^{64}$	a^{64}
		$a^4 \cdot a^{32} \cdot a^{64} = a^{100}$

この方法は繰り返し 2 乗法とよばれる。

(1-1) 他の n の場合にもいつもこの方法で正しい答が得られる理由を説明せよ。

(ヒント) 10 を 2 進法で表すと $1010_{(2)} = 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 2 + 2^3$ である。

【解答欄】

(1-2) k を自然数とする. 2 進 k 桁の自然数 n で最小のものと最大のものを k を使って表せ.

【解答欄】

(1-3) n が 2 進 k 桁の自然数のとき $k = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ であることを示せ. ここで $[x]$ は x を越えない最大整数を表す.

【解答欄】

(1-4) 繰り返し 2 乗法で a^n を求めるときに必要な掛け算の回数の範囲を n を使って表せ.

【解答欄】

2. M は正の整数であり, $\sum_{i=1}^M p_i = 1$, $\sum_{i=1}^M q_i = 1$, $0 < p_i, q_i < 1$ とする. $\log_e x \leq x - 1$ ($x > 0$) で

あることを利用して, $-\sum_{i=1}^M p_i \log_2 p_i \leq -\sum_{i=1}^M p_i \log_2 q_i$ を示せ.

【解答欄】

3. 3 次関数 $f(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 + x + b$ (a, b は実数の定数) を考える.

(3-1) $f(x)$ が極値を持つための a の範囲を求めよ.

【解答欄】

(3-2) $f(x)$ は $x=3$ で極値をとる. このときの a の値を求めよ.

【解答欄】

(3-3) $f(x)$ は上記(3-2)の a の値の場合, 複数の極値を持つ. 極値の値の一つが 0 である場合, 定数 b の取りうる値をすべて記述せよ.

【解答欄】

4. Aさんは「ある試験」に合格するまで「ある試験」を繰り返し受験し、合格したら受験をやめる. 試験に合格する確率は、それまでに受けた試験とは無関係に p である. 合格するまでの受験回数を n ($n=1,2,3,\dots$) とする.

(4-1) Aさんが n 回目に合格する確率を P_n とすると, P_n と P_{n+1} の関係を記せ.

【解答欄】

(4-2) Aさんが N 回以内 ($N=1,2,3,\dots$) に合格する確率を p, N を用いて示せ.

【解答欄】

(4-3) $p=\frac{1}{3}$ の場合に Aさんが 6 回以内に合格する確率を計算せよ.

【解答欄】